

ELBALK.EXE

Manual för användare

Inledning

Programmet beräknar stödmoment, stödreaktioner och stödnedsänkningar för kontinuerlig balk på elastiska stöd. Stöden kan ha olika eftergivlighet. Olika spännvidd och böjstyvheter EI kan anges för varje fack. Laster anges som typlaster, jämnt fördelad last, punktlast eller momentlast.

Genom att välja mycket små avstånd mellan stöden balkar på elastiskt underlag analyseras. Om stor stödstyvheter väljs kan stödmoment och stödreaktioner för balk på fasta stöd beräknas.

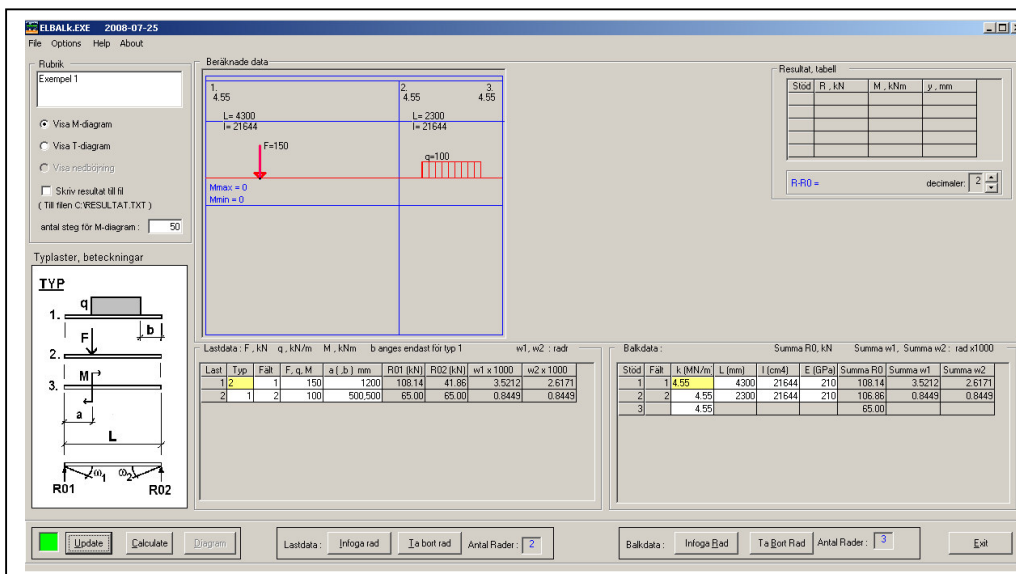
Resulterande stödreaktioners summor jämförs med angivna laster som en kontroll av inverkan av numerisk noggrannhet i beräkningen. Beräkningsmetoden som tillämpas är "5-momentekvationen". Vid beräkningen genereras en symmetrisk bandmatris som analyseras med en effektiv och stabil numerisk metod. I det fall indata innehåller värden som kan innebära noggrannhetsförlust som ger programmet en varning.

Systemkrav

Programmet ELBALK.EXE körs under Microsoft XP. En inte alltför gammal PC ger tillräcklig kapacitet för beräkningarna. Om användaren vill spara beräkningsresultat som fil så skrivs dessa i en text-fil RESULTAT.TXT i rotbiblioteket C:\, vilket innebär att användaren måste ha rättighet att skriva filer dit.

Bild på skärmen

I figur 1 visas den bild som visas för användaren när programmet startas. Vid programstart innehåller tabellerna för indata en balk på tre stöd.



Figur 1. Startsidan

Vid körning skriver användaren in balkdata och lastdata och beräknar sedan moment, tvärkrafter och nedsänkningar vid stöden. Indata kan sparas i och återladdas. Nedan följer en beskrivning av startbildens olika delar.

Som framgår av figur 1 finns nedtill på startbilden två tabeller, en för balkdata och en för lastdata.

Balkdata :						Summa R0, kN	Summa w1,	Summa w2 : rad x1000
Stöd	Fält	k (MN/m)	L (mm)	I (cm ⁴)	E (GPa)	Summa R0	Summa w1	Summa w2
1	1	4.55	4300	21644	210	108.14	3.5212	2.6171
2	2	4.55	2300	21644	210	106.86	0.8449	0.8449
3		4.55				65.00		

Balkdata : Infoga Rad Ta Bort Rad Antal Rader : 3 Exit

Figur 2. Tabell för balkdata

Balkdata

Data för varje stöd och fält anges på respektive rad, se figur 2, balkdata. De vita cellerna avser data som kan anges av användaren. De gråa cellerna innehåller beräknade data. När data ska införas klickas aktuell cell med vänster musklick, eller navigeras dit med piltangenterna. Den cell som kan redigeras markeras med gul färg. Data skrivs in på vanligt sätt, typ Excel. Inmatning avslutas med Enter, varvid den gula bakgrundsfärgen ersätts med vit färg, vilket visar att uppgifterna som matats in registrerats.

Uppgifterna som ska matas in för varje stöd respektive fält är:

stödet fjäderkonstant,	MN/m
motsvarande fälts spännvidd,	mm
motsvarande fälts tröghetsmoment,	cm ⁴
motsvarande fälts E-modul,	GPa

Beteckningen för ett visst fält motsvarar beteckningen för stödet vid vänstra änden av fältet. Om en balk har n stöd så har den alltså n-1 fält.

Vid beräkningarna antas, i förenklande syfte, att alla fält har samma E-modul som gäller för fält 1. Eftersom det är produkten EI som har relevans vid analysen kan olika E-moduler ändå efterliknas genom val av motsvarande tröghetsmoment I för fältet.

Innebörden av kolumnerna R0, w1 och w2 förklaras vid beskrivningen av tabellen med lastdata.

Om en ny rad ska införas så markeras raden före den nya genom musklick i kolumnen längst till vänster. Därefter klickas knappen "Infoga Rad" (eller trycks Alt+R). En ny rad (nytt stöd och nytt fält) sätts in. Data kopieras från överliggande rad.

Om en rad ska tas bort så markeras raden genom klick i vänstra kolumnen på aktuellt radnummer och trycks knappen "Ta Bort Rad". Raden tas bort och alla underliggande rader flyttas upp ett snäpp (om det inte var den understa raden som togs bort). Det går inte att ta bort de översta tre raderna, eftersom det minsta antal stöd behandlade balkar kan ha är tre.

Det förutsätts att ändstöden är ledade. Balkar med inspända ändstöd kan dock analyseras, exempelvis genom att balken görs symmetrisk över ändstödet. Detta, och liknade, grepp för att modellera olika egenskaper för balkar behandlas mer i detalj senare i manualen.

På samma rad som de nämnda knapparna finns också en ruta som anger hur många rader (stöd) som tabellen innehåller. Rutan uppdateras i takt med att rader infogas och tas bort.

Till höger om rutan med antal rader finns en stoppknapp, "Exit". Här kan körning av programmet avslutas. Innan slutgiltigt avslut sker ges en kontrollfråga.

Lastdata

I tabellen "Lastdata", till vänster om Balkdata-tabellen, definieras belastningarna för balken som ska analyseras, se figur 3.

Last	Typ	Fält	F, q, M	a (,b) mm	R01 (kN)	R02 (kN)	w1 x 1000	w2 x 1000
1	2	1	150	1200	108.14	41.86	3.5212	2.6171
2	1	2	100	500,500	65.00	65.00	0.8449	0.8449

Figur 3. Tabell för Lastdata

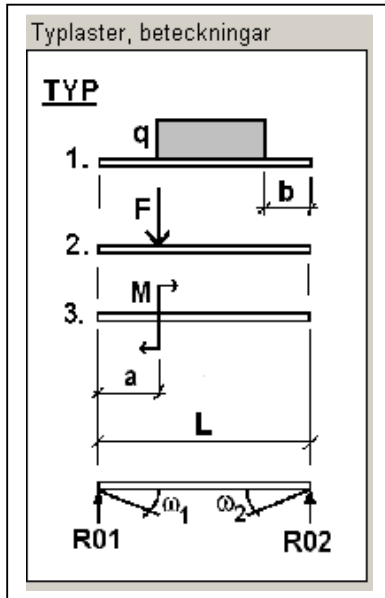
De data som användaren ska ange i tabellen är:

Lastens typbeteckning (se figur 4)

Det fält där lasten är belägen

Lastens storlek, beroende typen (F som kN, q som kN/m eller M som kNm)

Lastens placering i fältet (mm) - avstånd från vänster fältände för F och M. För utbredd last q anges avstånden till vänster respektive höger stöd. De två avstånden separeras med komma-tecken ",".



Figur 4. Typlaster med beteckningar

Till vänster om tabellen för inmatning av lastdata finns en bild som visar de tre typlaster som kan användas i programmet - utbredd last, punktlast samt moment. Högervändande moment räknas positivt. I figuren illustreras också betydelsen av innehållet i de fyra kolumnerna till höger i lastdatatabellen:

$R01$ = vänster upplagsreaktion när det aktuella fältet betraktas som en fritt upplagd balk på 2 stöd, belastad av typlasten.

$R02$ = dito höger upplagsreaktion.

$w1$ = vänster vinkeländring när det aktuella fältet betraktas som en fritt upplagd balk på 2 stöd, belastad av typlasten. Böjstyvhets EI beräknas med data från tabellen med Balkdata för fältet. Notera att i lastdata-tabellen så anges värdena $w1 \cdot 1000$ respektive $w2 \cdot 1000$, för ökad läsbarhet.

Felmeddelanden

Om man i Lastdatatabellen anger en typlastbeteckning som inte existerar, eller ett fält som inte finns så visas ett felmeddelande. Felmeddelande visas även för andra typer av indatafel, exempelvis lastavstånd större än spännvidden, icke-numeriska data, m fl.

Summa $R0$, summa $w1$ och summa $w2$ i Balkdatatabellen

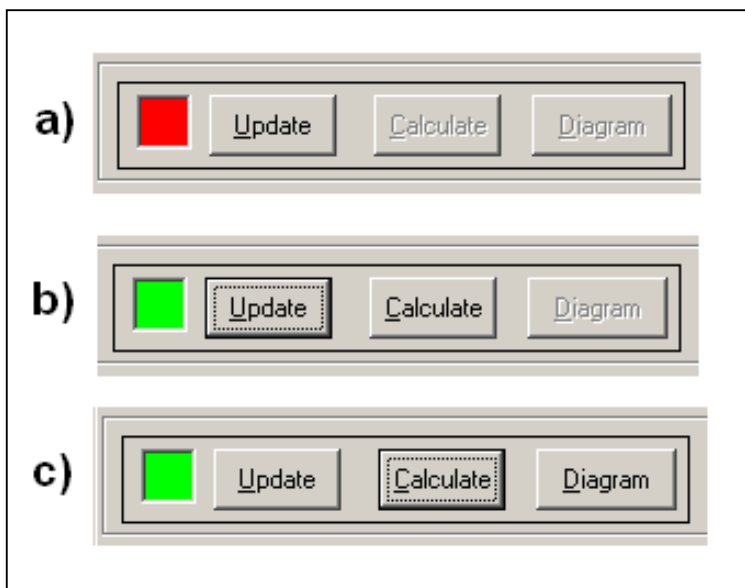
För ett visst stöd och fält summeras inverkan av reaktioner $R0$ och vinkeländringar $w1$ och $w2$ beräknade enligt lasttabellen. Resultatet av summeringen visas i de tre sista kolumnerna i tabell Balkdata.

Insättning och borttagning av rader i tabellen

Detta utförs med knapparna under Lastdatatabellen, på samma sätt som för Balkdata. På samma rad som knapparna finns en ruta som visar antalet rader (antal typlaster).

Update-, Calculate- och Diagram-knapparna. Statusbox

Nederst till vänster finns tre knappar som uppdaterar programdata (Uppdate), utför beräkning av stödmoment, stödreaktioner och stödnedsänkningar (Calculate) samt genererar utskrift av moment- och/eller tvärkraftdiagram (Diagram), se figur 5.



Figur 5. Update-, Calculate-, och Diagram-knapparna + statusrutan

En ändring av något indata, och även några andra händelser, medför att beräkning inte är möjlig utan viss behandling av indata, eller att tidigare utförd beräkning inte längre gäller. Användaren uppmärksammas på en sådan situation genom att Statusboxen, längst till vänster på raden, färgas röd, se figur 5a.

Rödmarkeringen innebär en uppmaning till användaren att trycka Uppdate-knappen. Det ska nämnas att för en del ändringar av indata sker uppdatering automatiskt. Av figur 5a framgår också att knapparna Calculate och Diagram inte är funktionella då Statusboxen är rödmarkerad.

När Update trycks så utför programmet vissa beräkningar och kontroller. Då dessa är klara blir Statusboxen grönmarkerad och knappen Calculate funktionell, figur 5b. Användaren trycker då på den knappen, varvid stödmoment, stödreaktioner och stödnedsänkningar beräknas. Vidare beräknas värden för moment och tvärkraft för de punkter på balken för vilka användaren specificerat, på det sätt som beskrivs senare i manualen.

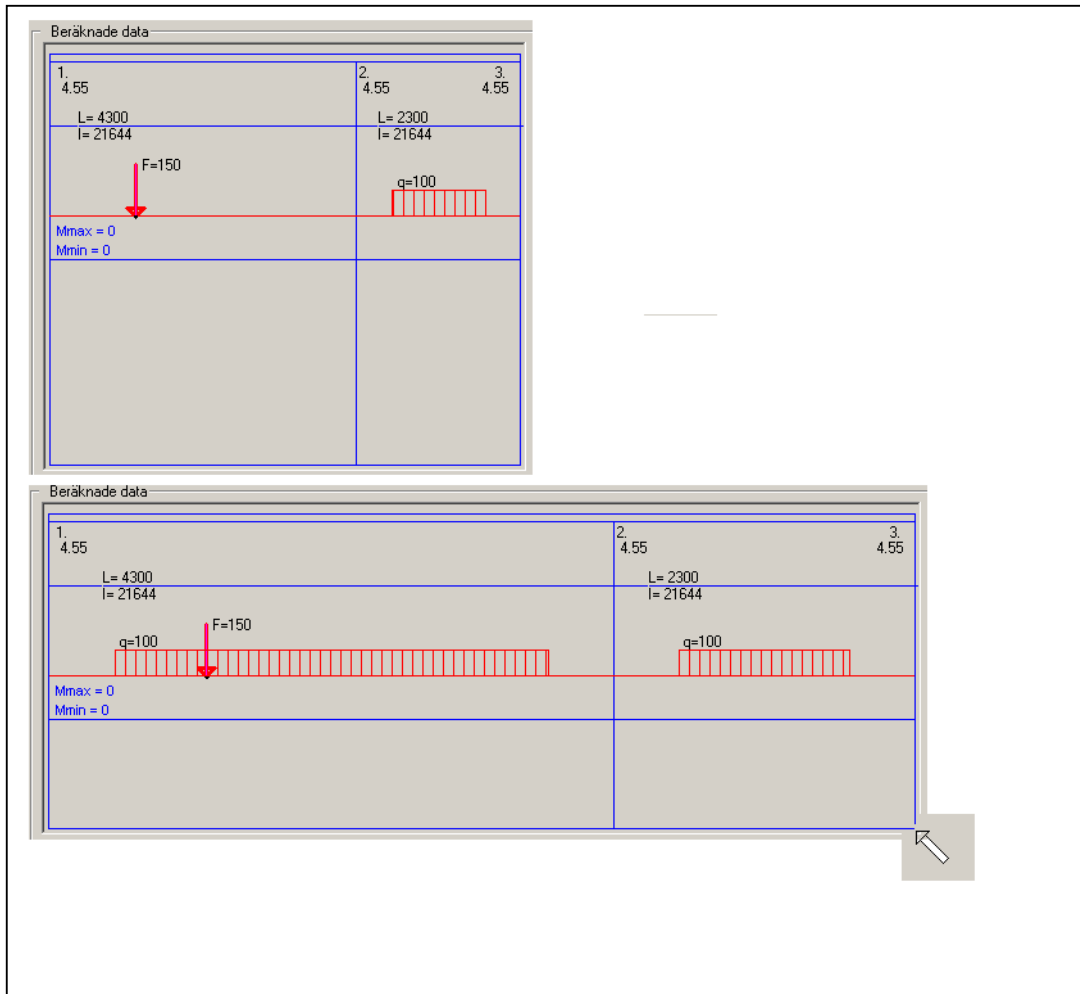
Om beräkningarna utförs utan att fel uppkommer så blir även knappen Diagram funktionell, figur 5c. Funktionen för den knappen beskrivs senare i avsnittet Resultatredovisning.

Man kan kanske tycka att knapparna Calculate och Diagram är överflödiga. Varför inte nöja sig med Uppdate och låta funktionerna under Calculate och Diagram genereras automatiskt när Uppdate trycks? Motivet till att ha de två "extra" knapparna är att det är lättare att lokalisera eventuella fel som uppkommer under körningen och att användaren får en bättre bild av vad som utförs.

Grafisk visning av Balkdata och Lastdata

Genom grafisk presentation av data införda i tabeller är det enklare att kontrollera att data är de avsedda än att enbart studera tabellvärdena.

I boxen ovan Lastdatatabellen visas grafiskt Balkdata och Lastdata med de värden som skrivits in i tabellerna, se figur 6. Överst visas en balksymbol, där stödnummer, fjäderkonstanter, spännvidder samt tröghetsmoment skrivs.



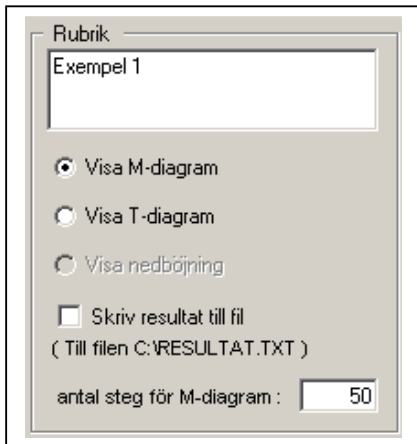
Figur 6. Presentation av Balkdata och Lastdata

Under uppgifterna med balkdata visas lastdata (röd färg). Som visas i figur 6 kan boxen ändra form, för att anpassas till beräkningssituationen, genom att vänster musknapp hålls ner och flyttas, med muspekaren inom rutan.

Som framgår av figur 6 kan, som nämnts, flera laster införas i samma fält. I de fall utbredda laster med olika utsträckning förekommer inom samma fält så identifieras de olika lasterna genom utskriften av intensiteten vid lastens vänstra gräns, medan den högra gränsen endast framgår i Lastdata-tabellen.

Ytterligare indata, Rubrik och steg

Utöver ovan beskrivna indata (Balkdata och Lastdata) ska ytterligare några indata införas innan Calculate och Diagram trycks, se figur 7.



Figur 7. Rubrik, antal steg, val av diagramtyp samt val av resultatdump.

Indatarutan återfinns upptill till vänster på startbilden, se figur 1. Överst i rutan skrivs in en rubrik för beräkningen. Under rubriken anges om M- eller T-diagram ska visas när knappen Dialog trycks (nedböjningsgrafan är f n under framtagning).

Under dessa val finns en box som om den markeras (med ett musklick) medför att alla beräknade data dumpas till en fil, "RESULTAT.TXT". Filen skrivs till biblioteket "C:\", där den kan öppnas med en textbehandlare (t ex Notepad eller Word), eller kopieras till annan plats.

På sista raden i rutan anges hur i hur många snitt M- och T-diagram ska beräknas. Ökat antal ger noggrannare resultat, men ökad beräkningstid. Upp till 10000 snitt är ger inte orealistisk tidåtgång för en modern PC, beroende på den mycket effektiva algoritmen för beräkningen, men högst 5000 - 10000 steg är i de flesta fall tillräckligt för att få ett tillräckligt noggrant resultat.

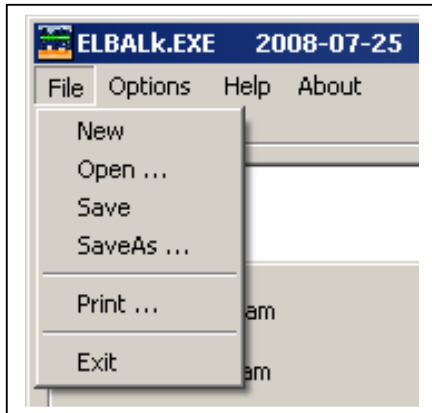
Spara och ladda indata datafiler

På menyraden finns ett antal rubriker under vilka undermenyer kan nås. I figur 8 visas undermenyerna under menytitel File.

Övriga menytitlar (Options, Help och About) innehåller allmän information som avser att underlätta arbetet med programmet.

Under valet About presenteras även information om användarens system, vilket avser underlätta felsökning och support.

Undermenyerna nås genom att klicka med vänster musknapp på respektive menytitel, eller trycka Alt+första bokstaven i titeln. För menyval File trycks alltså tangenterna Alt och F samtidigt.

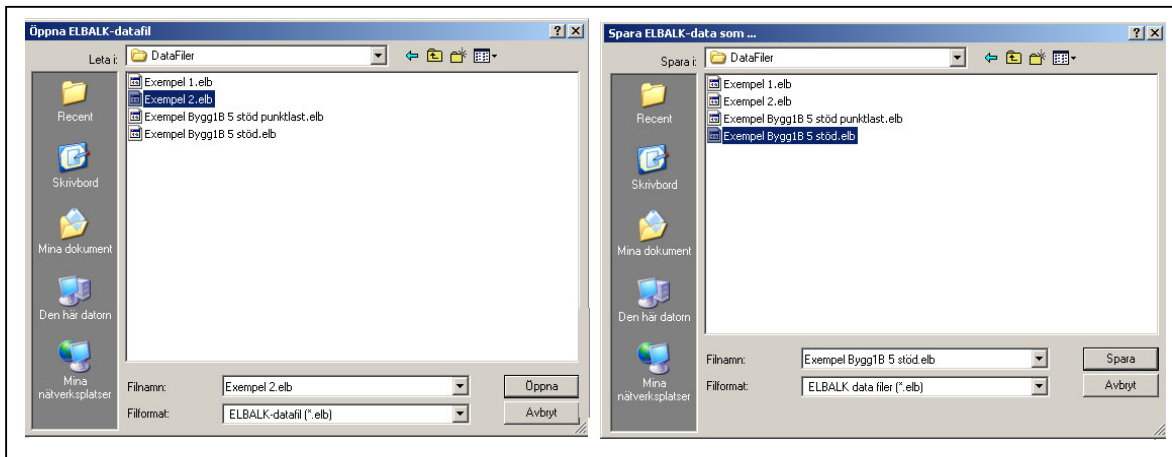


Figur 8. Undermenyer under File

De olika valen har följande funktioner:

- New - återställer indatarutor till samma status som vid programstart.
- Open ... - ger dialogruta för navigering till och laddning av en indatafil för ELBALK.EXE.
- Save As ... - ger dialogruta för att spara indata för beräkning med ELBALK.EXE.
- Save - samma
- Print - ger anvisningar för utskrift
- Exit - ger val för avslutning

I figur 9 visas de dialogrutor som visas när Open respektive Save trycks.



Figur 9. Dialogrutor vid Oppen respektive Spara, som finns under menyradens val File.

För alla som öppnat eller sparat en fil i Windows är detta välbekanta rutor. Vi antar därför att utförligare beskrivning av tillvägagångssätt inte behövs. I annat fall hänvisas till avsnittet 'Help' i Windows.

Resultatredovisning

Resultatet av en beräkning redovisas dels i en tabell (figur 10), dels som M-diagram och/eller T-diagram, figur 11. Diagrammen visas underst i rutan där Balk- och Lastdata visas med grafik.

Resultat, tabell

Stöd	R, kN	M, kNm	y, mm
1	71.63	0.00	15.74
2	211.62	-156.99	0.18
3	-3.26	0.00	-0.72

R-R0 = 5.6843418860808E-14 decimaler: 2

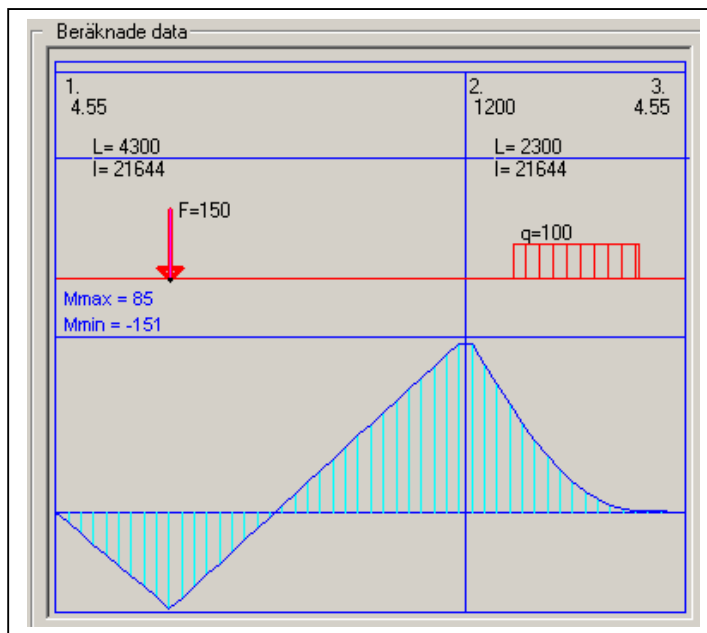
Figur 10. Tabell med resultat data

Tabellen med resultatdata kan flyttas genom att mus-pekaren med vänster musknapp hålls nere på tabellens ram och flyttas. På så sätt kan tabellen flyttas dit den för tillfället gör sig bäst. Tabellens höjd, d v s antal rader som visas utan att scrollbar kommer fram, kan ökas genom att peka inne i tabellen med muspekaren, varefter pekaren med vänster musknapp nedtryckt flyttas nedåt.

Vidare kan antalet decimaler som visas väljas till mellan 0 och 6 genom klick på upp- och nedknapparna nedtill till höger.

De värden som visas i tabellen är stödreaktion, stödnedsjunkning och stödmoment.

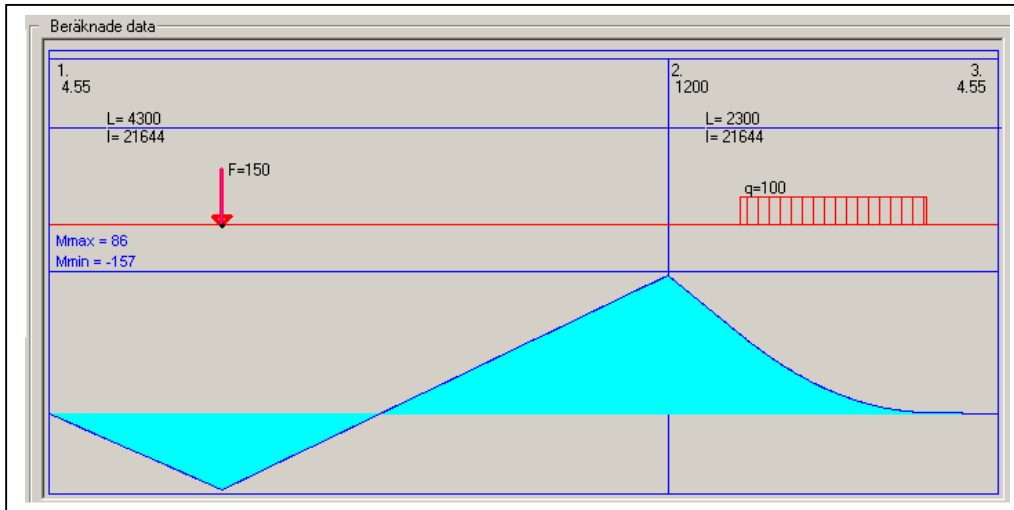
Vidare visas en jämförelse mellan summan av påförda laster och beräknade reaktioner. Skillnaden utgör ett mått på beräkningsnoggrannheten för den utförda beräkningen.



Figur 11. Momentdiagram, beräkning av balken med startdata, men med styvare stöd 2.

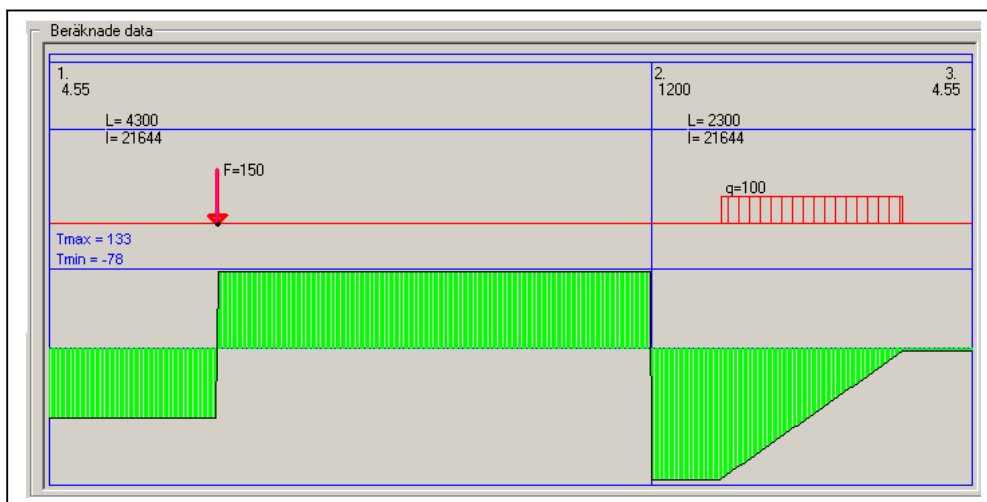
I figur 11 visas ett momentdiagram, för samma balk som genererat resultattabellen i figur 2. Som nämnts visas M-diagram om motsvarande radio-knapp markerats i Rubrik-rutan. Momentet visas på den sida balklinjen där det ger dragning.

Utseendet av diagrammet ändras tillsammans med balk- och lastdata om formen för rutan med balksymbolen ändras genom att dra muspekaren, som beskrivits tidigare. I figur 12 illustreras detta – antalet balksegment har där ökats till 1000, jämfört med 50 element i figur 11. Skillnaden i beräkningstid är ej märkbar på en 'normalkompetent' PC. Notera även att Max och Min moment skrivs ut till vänster över diagrammet



Figur 12. Samma balk som i figur 11, men med 1000 segment istället för 50

Anges istället för M-diagram att T-diagram ska skrivas ut så erhålls bilden som visas i figur 13, tvärkraftdiagrammet för balken. I jämförande syfte har här 500 element använts. Notera även att ovanför T-diagrammet så skrivs Tmax och T-min ut.



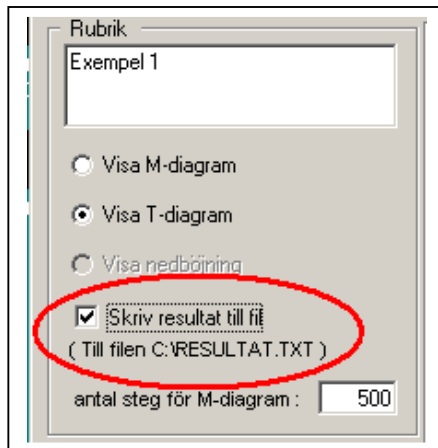
Figur 13. Tvärkraftdiagram för balken i figur 11.

Moment- och tvärkraftdiagrammen kan även ritas på samma bild, så att sambandet mellan moment och tvärkraft kan studeras grafiskt. Man kan notera mindre skillnader i momentvärden i de visade exemplen i tabell respektive diagram, fig 10 och 11. Detta beror på att värdena i diagrammen sorteras fram i elementpunkterna, vilket leder till att det exakta värdet missas om en elementgräns inte sammanfaller med ett stödläge. Då ett mycket stort antal element används elimineras denna felkälla i diagrambilden.

Utskrift av alla beräknade resultat

Den i figur 10 visade resultattabellen återger endast beräknade värden vid stöden (reaktion, nedsänkning och moment). Emellertid beräknas många fler värden då knappen Calculate trycks, nämligen alla M-värden och T-värden i elementgränserna.

Användaren kan generera utskrift av dessa värden om check-boxen 'Skriv resultat till fil' bockas för, se figur 14.



Figur 14. Checkruta för att generera filen RESULTAT.TXT

När Dialog-knappen trycks genereras då filen RESULTAT.TXT. Filen är en vanlig textfil som kan öppnas i ordbehandlare, t ex NOTEPAD.EXE, MS-Word, eller motsvarande. Filen placeras i rotbiblioteket C:\, varför sökvägen till filen är "C:\RESULTAT.TXT".

I figur 15 visas ett utdrag av filen.

'399	5266.80	-39.0510992838378	86.5753159944778"
'400	5280.00	-37.9170171127106	85.2553159944778"
'401	5293.20	-36.8003589415835	83.9353159944778"
'402	5306.40	-35.7011247704564	82.6153159944778"
'403	5319.60	-34.6193145993293	81.2953159944778"
'404	5332.80	-33.5349284252022	79.9753159944778"
'405	5346.00	-32.5079662570750	78.6553159944778"
'406	5359.20	-31.4784280859479	77.3353159944778"
'407	5372.40	-30.4663139148209	76.0153159944778"
'408	5385.60	-29.4716237436938	74.6953159944778"
'409	5398.80	-28.4943575725667	73.3753159944778"
'410	5412.00	-27.5345154014396	72.0553159944778"
'411	5425.20	-26.5920972303124	70.7353159944778"
'412	5438.40	-25.6671030591853	69.4153159944778"
'413	5451.60	-24.7595328880582	68.0953159944778"
'414	5464.80	-23.8693867169311	66.7753159944778"
'415	5478.00	-22.9966645458040	65.4553159944778"

Figur 15. Del av RESULTAT.TXT

Vid val av utskrift av en balk med en mycket stor mängd element kan förstås filen bli skrymmande. För 500 element blir storleken ca 26 kB, medan 10000 element ger en fil som har storleken 517 kB.

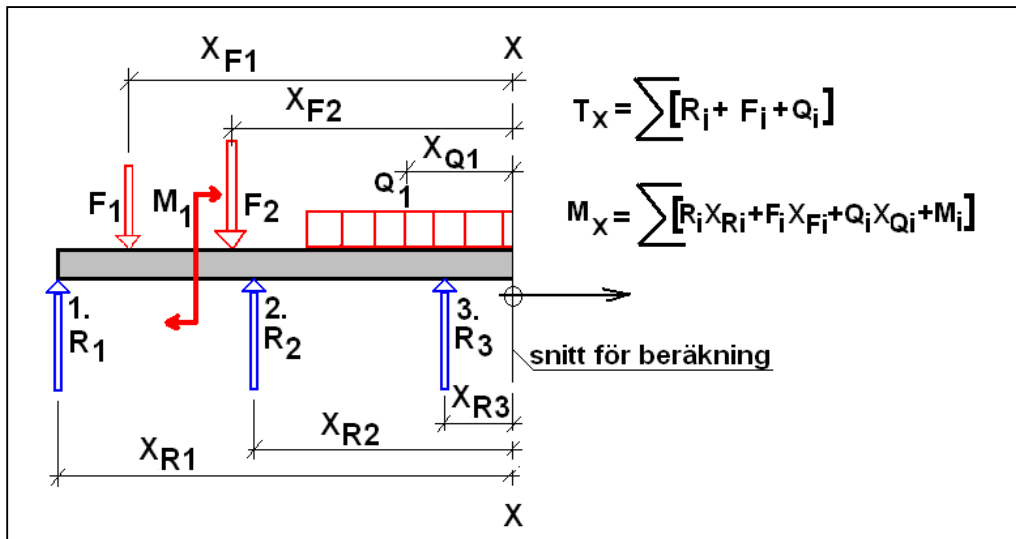
När en ny körning görs och check-rutan är markerad så skrivs den gamla filen över. Om man vill spara utskriftdata för en körning och sedan skriva ut en ny resultat-fil så måste man alltså spara undan filen från den första körningen.

Utöver data för element-nummer, elementens avstånd från vänstra stödet samt M- och T-värden för respektive element, så innehåller filen även en header med Rubrik-texten, datum, antal stöd och antal element.

När filen skrivits så ges ett meddelande i en ruta. Uppkommer något fel, t ex om enhet C: av någon anledning saknas, så ges ett felmeddelande.

Beräkning av Moment och Tvärkraft för hela balken

Vid beräkning av moment och tvärkraft längs balken flyttas successivt beräkningssnittet åt vänster med början vid det vänstra ändstödet. Tvärkraften i snittet är förstas summan av krafter till vänster om snittet och böjmomentet är summan av de moment dessa krafter har med avseende på snittet, se figur 16.



Figur 16. Beräkning av tvärkraft och böjmoment i ett snitt x-x på balken

Beräkningssnittet flyttas åt höger i steg som användaren anges i Rubrikrutan. Det kan nämnas att för varje ändring av formen för bilden med balkdata och diagram så beräknas alla \$M_x\$ och \$T_x\$ för balken samt uppgritas värdena.

Beräkning av nedsjunkning och nedböjning för hela balken

Nedsjunkningen \$y_j\$ för respektive stöd "j" beräknas enligt uttrycket

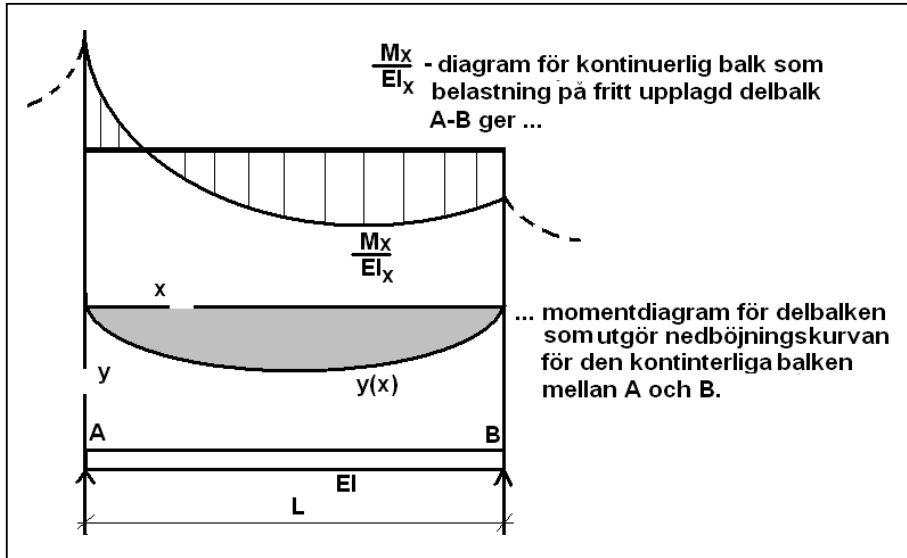
$$y_j = R_j/k_j$$

där

\$R_j\$ = stödreaktion

\$k_j\$ = stödets fjäderkonstant

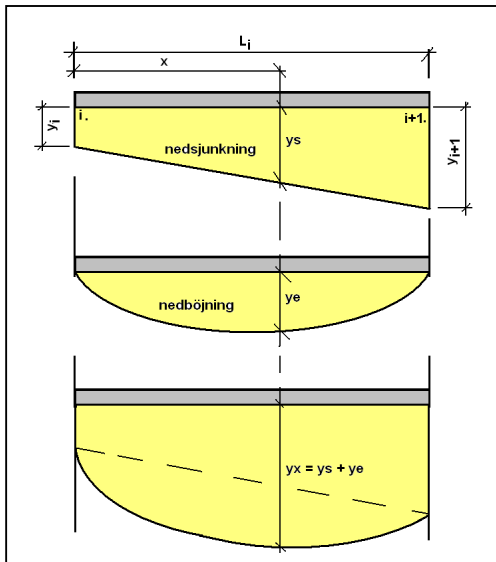
Nedböjning mellan stöden uppkommer av böjmoment där. Då momentdiagrammet är känt kan nedböjningen beräknas med hjälp av elastiska linjens ekvation. Metoden brukar kallas "momentet av momentet" och innebär att varje delbalk betraktas som en fritt upplagd balk som belastas med M_x/EI_x – diagrammet för den kontinuerliga balken. Böjmomentet i ett visst snitt av delbalken belastad på detta sätt utgör den kontinuerliga balkens nedböjning i snittet, se figur 17.



Figur 17. Beräkning av den kontinuerliga balkens nedböjning med metoden "momentet av momentet".

Resultande nedsjunkning för balken på elastiska stöd

Den resulterande nedåtgående rörelsen (y_x) i en viss punkt utgör summan av nedsänkning orsakad av stödnedsjunkning (y_s) och elastisk nedböjning (y_e), se figur 18.



Figur 18. Sammanlagd rörelse nedåt y_x är summan av stödnedsjunkning och nedböjning.

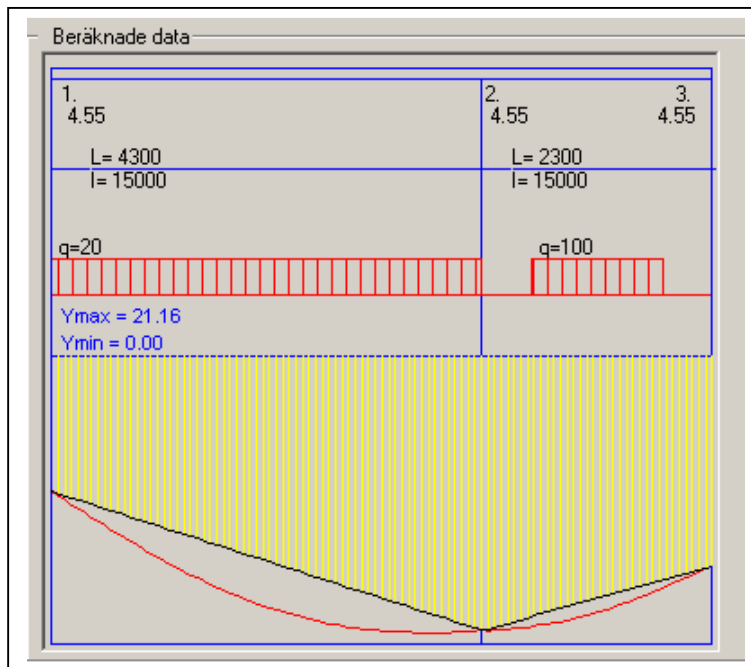
Rörelsen av stödnedsjunkning (y_s) mellan stöd "i" och stöd "i+1", på avståndet x från stöd "i", beräknas enligt uttrycket

$$y_s = y_i + x \cdot (y_{i+1} - y_i) / L_i$$

Den sammanlagda rörelsen (y_x) blir förstås

$$y_x = y_s + y_e$$

med beteckningar enligt figur 18. Detta uttryck gäller även i de fall rörelser uppåt sker, exempelvis under inverkan av uppåtriktade krafter, eller omkring mycket styva stöd omgivna av vecka stöd.



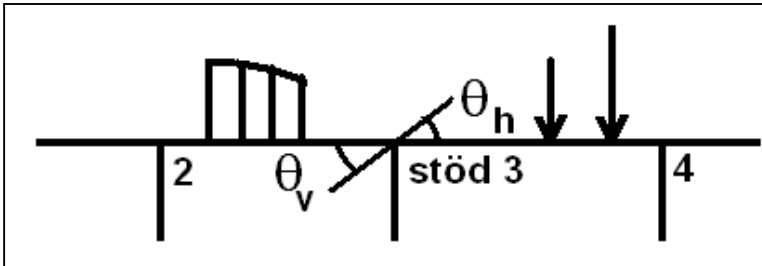
Figur 19. Diagram vid val 'nedböjning'

Vid val 'nedböjning' för diagram så visas nedböjning av stödsättning med gult och summa nedböjning med rött, se figur 19. Skillnaden mellan undre konturen av det gula fältet och den röda linjen är alltså den elastiska nedböjningen orsakad av moment.

Beräkningsmetod

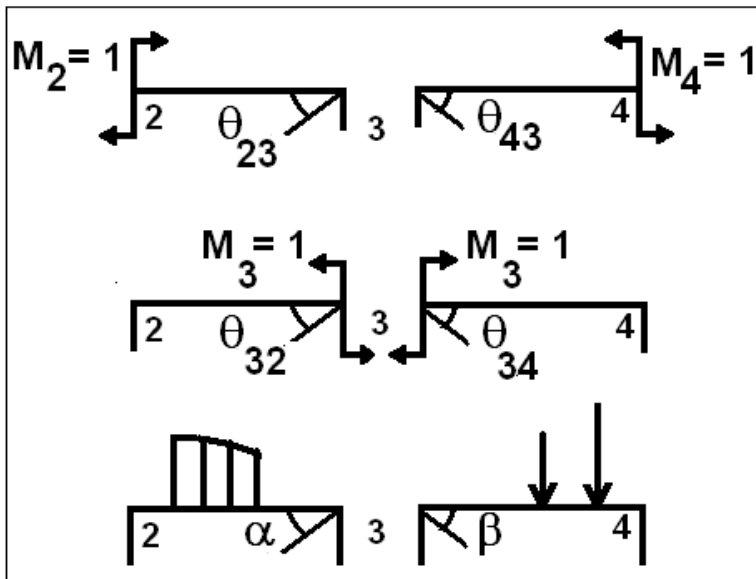
I figur 1 visas ett avsnitt av en kontinuerlig balk. Belastningar på balken orsakar vinkeländringar vid stöden. Stöd 3 betraktas. Att balken är kontinuerlig medför att stödvinkeländringen till vänster om stödet är lika stor som stödvinkeländringen till höger om stödet (Θ_h). Med beteckningarna i figuren innebär det att

$$\Theta_v - \Theta_h = 0 \quad \dots (1)$$



Figur 1. Stödvinkeländringar Θ_v och Θ_h vid ett stöd för en kontinuerlig balk.

Delbalkarna 2-3 och 3-4 skärs ut och den kontinuerliga balkens vinkeländringar för stöden behålls för de utskurna balkarna genom införande av stödmomenten M_2 , M_3 och M_4 , se figur 2. Vinkeländringarna vid stöd 3 av yttre laster på delbalkarna betecknas α och β .

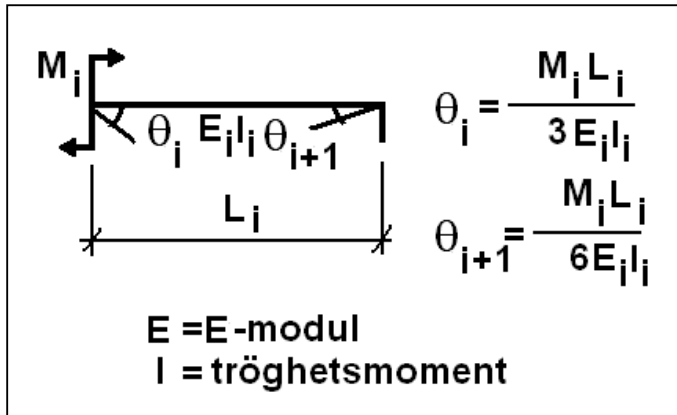


Figur 2. Vinkeländringar och ändmoment för delbalkar

De i figur 2 visade stödvinkeländringarna antas framkallade av respektive moment = 1. Om det antas att vinkeländringarna är proportionella mot momenten så ger insättning i ekvation (1), kontinuitetsvillkoret, att

$$M_2 \Theta_{23} + M_3 (\Theta_{32} + \Theta_{34}) + M_4 \Theta_{43} + \alpha + \beta = 0 \quad \dots (2)$$

För delbalkar med konstant böjstyvhets EI erhålls samband mellan stödvinkeländringar och ett ändmoment enligt figur 3:



Figur 3. Stödvinkeländringar för ändmoment vid balk med konstant EI

Efter insättning i ekv (2) erhålls efter förenkling för stöd 3:

$$M_2 * L_2 / (E_2 I_2) + 2M_3 * (L_2 / (E_2 I_2) + L_3 / (E_3 I_3)) + M_4 * L_3 / (E_3 I_3) + 6 * (\alpha + \beta) = 0 \quad \dots (3)$$

Ekvation (3) kallas Clapyrons ekvation efter upphovsmannen, publicerades 1855. När E-modulen är konstant för hela den kontinuerliga balken kan ekv (3) skrivas

$$M_2 * L_2 / I_2 + 2M_3 * (L_2 / I_2 + L_3 / I_3) + M_4 * L_3 / I_3 + 6E * (\alpha + \beta) = 0 \quad \dots (4)$$

När både E och I är konstant för hela balken, dvs konstant böjstyvhets EI, kan ekv (3) skrivas

$$M_2 * L_2 + 2M_3 * (L_2 + L_3) + M_4 * L_3 + 6EI * (\alpha + \beta) = 0 \quad \dots (5)$$

Är både böjstyvhets EI och spännvidd L konstant för hela balken erhålls

$$M_2 + 4M_3 * M_4 + (6EI/L) * (\alpha + \beta) = 0 \quad \dots (6)$$

Ekv (3) kan mer generellt skrivas

$$a_2 M_2 + a_3 M_3 + a_4 M_4 = c_3 \quad \dots (7)$$

där

a_2, a_3, a_4 är konstanter som beror av balkens egenskaper och geometri och

c_3 är en konstant som även beror av belastningen på balken

Om den kontinuerliga balken antas ha n stöd och ändstöden antas ledade (och obelastade av momentlast) så får man n-2 ekvationer att lösa i system för att beräkna de n-2 obekanta stödmomenten. För exempelvis en balk på 6 stöd visas resulterande ekvationssystem i fig 4.

The diagram shows a horizontal beam with six supports labeled 1 through 6. Below the beam, a system of four equations is presented, each corresponding to a support from 2 to 5. The equations are:

$$\begin{cases} a_3M_2 + a_4M_3 & = c_3 \dots(1) \\ a_2M_2 + a_3M_3 + a_4M_4 & = c_3 \dots(2) \\ a_2M_3 + a_3M_4 + a_4M_5 & = c_3 \dots(3) \\ a_2M_4 + a_3M_5 & = c_3 \dots(4) \end{cases}$$

Figur 4. Exempel, kontinuerlig balk på 6 stöd.

Figuren är kanske något missvisande så tillvida att konstanterna a_2 , a_3 , a_4 och c_3 förstås i allmänhet har olika värden på olika rader. För att generera konstanterna på en viss rad kan man föreställa sig att "mittstödet" stöd 3 successivt förflyttas åt höger på balken, med början över stöd 2.

Ekvationssystemet i figur 4 kan uttryckas i matrisform, se figur 5.

The matrix representation of the system is shown as follows:

$$\begin{bmatrix} a_3 & a_4 & & & \\ a_2 & a_3 & a_4 & & \\ & a_2 & a_3 & a_4 & \\ & & a_2 & a_3 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 \\ c_3 \\ c_3 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

(element = 0 ej visade)

Figur 5. Ekvationssystem i matrisform

Ekvationssystemet i figur 5 kan uttryckas som

$$\mathbf{AM} = \mathbf{C} \dots (8)$$

där

A = koefficientmatris med element som beror av balkegenskaper

M = kolumnvektor med de sökta stödmomenten

C = kolumnvektor med element som beror av laster på balken

Den generella lösningen till ekv (8) lyder

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \quad \dots (9)$$

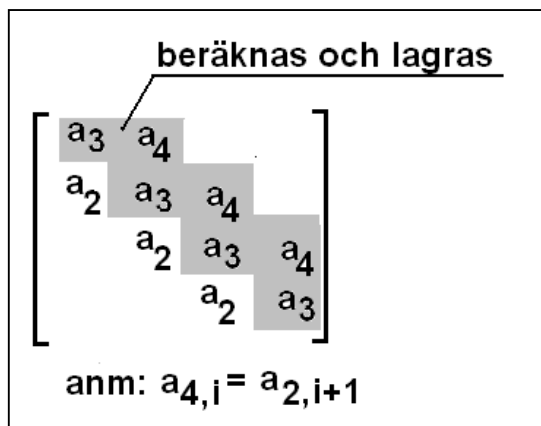
där \mathbf{A}^{-1} är inversmatris till \mathbf{A}

Som framgår av figur 5 har matrisen \mathbf{A} bandstruktur med en huvuddiagonal och två co-diagonaler (en överdiagonal och en underdiagonal). Diagonalerna innehåller elementen a_3 , a_4 och a_2 , respektive, se figur 5. Man kan visa att element a_4 på en rad är lika med element a_2 på raden under. Matrisen \mathbf{A} är därför en symmetrisk tridiagonal bandmatris (bandbredd = 3) med ordningen $(n-2) \times (n-2)$.

Detta innebär att endast elementen i huvuddiagonalen a_3 och elementen a_4 i överdiagonalen behöver beräknas och lagras, se figur 6. Erforderligt utrymme för lagring av \mathbf{A} är

$2m - 2$, approximativt lika med $2m$

där $m = n - 2$, $n =$ antal stöd för den kontinuerliga balken



Figur 6. A-matrisen är en symmetrisk bandmatris.

Som nämnts kan stödmomenten beräknas med inversmatrisen \mathbf{A}^{-1} . Till skillnad från bandmatrisen \mathbf{A} är inversmatrisen fylld av element skilda från noll. För att lagra inversmatrisen åtgår därför m^2 element jämfört med $2m$ element för lagring av de två diagonalerna enligt figur 6. Ett villkor för att inversmatrisen ska existera är att matrisen \mathbf{A} inte är singular. Singularitet uppkommer exempelvis om något element i huvuddiagonalen är lika med noll.

För en balk med måttligt antal stöd spelar skillnaden ingen roll, men om antalet stöd är mycket stort blir tillgänglig minneskapacitet en begränsande faktor. För

exempelvis 10000 stöd kräver inverslösningen lagring av 100 miljoner flyttal, medan lagring av enbart de två huvuddiagonalerna endast kräver lagring av 0.02 miljoner flyttal. Man frågar sig kanske när/om det kan bli aktuellt att beräkna en balk med så många stöd - som framgår senare medför modellering av balkar på elastiskt underlag ofta ett mycket stort antal stöd.

Lösning av ekvationssystemet $\mathbf{AM} = \mathbf{C}$

Det snabbaste sättet att lösa ekvationssystemet är direkt Gausseliminering med återföljande bakåtsubstitution. Vid Gausselimineringen transformeras matrisen \mathbf{A} så att alla element under huvuddiagonalen blir = 0.

Vid direkt Gausseliminering sker division med elementen i huvuddiagonalen i nämnaren. I de fall dessa värden blir alltför små jämfört med övriga element så kan förlust i noggrannhet uppkomma. Om något diagonalelement är = 0 kan ingen lösning alls uppnås med den metoden. För att åtgärda sådana problem kan pivotering tillämpa, vilket innebär att ordningsföljden för rader ändras så att numerisk instabilitet, orsakad av division med mycket små tal, om möjligt undviks.

I det fall matrisen \mathbf{a} är diagonaldominant, vilket innebär att diagonalelementen på varje rad är större än summan av omgivande element på samma rad, så kan den önskvärda metoden direkt Gausseliminering med återföljande bakåtsubstitution användas utan noggrannhetsförlust. I det aktuella fallet innebär diagonaldominans att för varje rad ska gälla

$$|a_3| > |a_2| + |a_4| \quad \dots (10)$$

För en balk med konstant EI erhålls enligt ekv (5) att

$$a_2 = L_2 \quad \dots (11a)$$

$$a_4 = L_3 \quad \dots (11b)$$

$$a_3 = 2(L_2 + L_3) = 2(a_2 + a_4) \quad \dots (11c)$$

vilket uppenbarligen medför diagonaltunghet. Även det mer generella fallet med varierande L, E och I för varje fack ger diagonaltunghet, vilket framgår av ekv 12 a – c nedan. Notera dock att EI inte får vara = 0 för någon delbalk.

$$a_2 = L_2 / (E_2 I_2) \quad \dots (12a)$$

$$a_4 = L_3 / (E_3 I_3) \quad \dots (12b)$$

$$a_3 = 2(a_2 + a_4) \quad \dots (12c)$$

Antalet beräkningsoperationer som krävs för att beräkna inversmatrisen \mathbf{A}^{-1} är proportionell mot m^3 och antalet operationer som krävs för matrismultiplikationen $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}$ är proportionell mot m^2 . Detta kan jämföras med det totala antalet operationer för att utföra direkt Gausselimination och bakåtsubstitution som är proportionellt mot m .

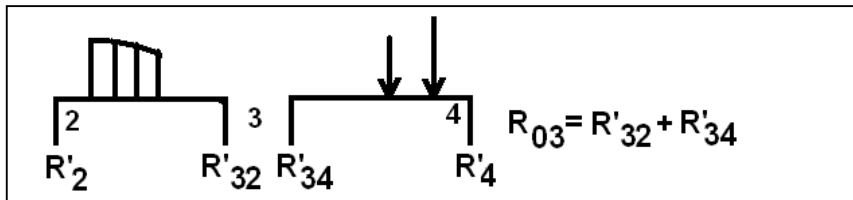
Sammanfattningsvis gäller alltså att kontinuerliga balkar på fasta (oeftergivliga) stöd snabbast och med minsta behov av minnesutrymme analyseras med direkt Gausselimination och bakåtsubstitution på det sätt som visats ovan.

Beräkning av stödreaktioner

Sedan stödmomenten har beräknats så beräknar man stödreaktionerna. För stödet 3 enligt ovan blir reaktionen R_3 lika med

$$R_3 = R_{03} + (M_2 - M_3)/L_2 + (M_4 - M_3)/L_3 \quad \dots(13)$$

där R_{03} = stödreaktionen motsvarande delbalkar utan ändmoment, se figur 7.



Figur 7. Upplagsreaktioner för delbalkar

Elastiska stöd

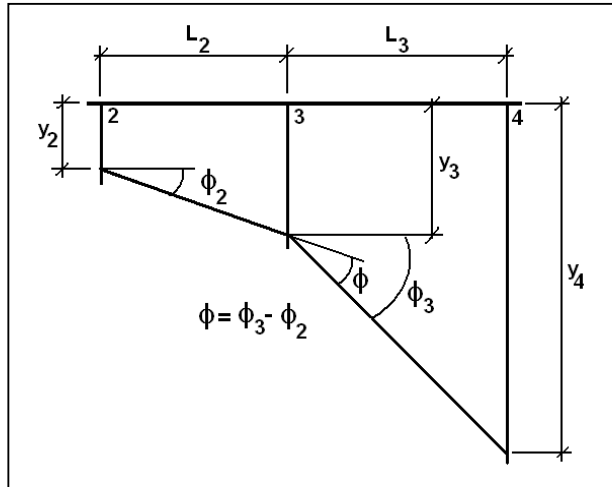
Ekv (3), Clapeyrons ekvation, kallas ofta "tremoment" ekvationen eftersom 3 obekanta stödmoment ingår i grundekvationen. Några år (1860) efter det att den publicerats kompletterade Mohr ekvationen med en term som beaktar nedsjunkning av ett stöd. Det resulterande uttrycket för ett stödmomentet innefattar stödmomenten i 5 närbelägna stöd och Mohrs komplettering av tremomentekvationen brukar därför kallas "femmomentekvationen".

Korrekturen innebär att till summan av stödvinkeländringarna ($\alpha + \beta$) av last på balken, så adderas en vinkeländring ϕ som beror av stödets nedsjunkning, se figur 8. Den modifierade ekv (2) blir då:

$$M_2 \Theta_{23} + M_3 (\Theta_{32} + (\Theta_{34})) + M_4 \Theta_{43} + \alpha + \beta + \phi = 0 \quad \dots (14)$$

Den modifierade tremomentekvationen ekv (3) blir:

$$M_2 * L_2 / (E_2 I_2) + 2M_3 * (L_2 / (E_2 I_2) + L_3 / (E_3 I_3)) + M_4 * L_3 / (E_3 I_3) + 6 * (\alpha + \beta + \phi) = 0 \quad \dots (15)$$



Figur 8. Stödvinkeländring ϕ vid stöd 3 av stödnedsjunkningar

Stödvinklarna, uttryckta i radianer, antas motsvara funktionen tangens för vinklarna, vilket motiveras av att vinklarna är mycket små. Den sökta vinkeländringen ϕ vid stöd 3 beräknas därför som följer (beteckningar enligt figur 8) :

$$\phi = (y_4 - y_3)/L_3 - (y_3 - y_2)/L_2 \quad \dots (16)$$

där y_i betecknar nedsänkningar för respektive stöd "i".

Sambandet mellan nedsjunkning och stödreaktion för stöden antas linjärt. För varje stöd finns därför en fjäderkonstant (k), exempelvis för stöd 3:

$$R_3 = k_3 \cdot y_3 \quad \dots (17)$$

som ger

$$y_3 = R_3 / k_3 \quad \dots (18)$$

Fjäderkonstanten har dimensionen kraft/längd. Värdet på k bestäms av stödets utformning, exempelvis upplag på sekundärbalkar som ger viss nedböjning vid belastning, på pålar som ger viss hoptryckning då de belastas, eller underlag som vilar på mark som vid last ger viss nedsjunkning.

Sambandet mellan stödreaktion och böjmoment ges av ekv (13). Kombination av ekv (13) och ekv (18) ger ett samband mellan nedsänkning och böjmoment:

$$y_3 = [R_{03} + (M_2 - M_3)/L_2 + (M_4 - M_3)/L_3] / k_3 \quad \dots (19)$$

Den sökta vinkeländringen ϕ kan således uttryckas som funktion av stödmomentet M_3 vid det studerade stödet (3), stödmomenten vid de två stöden till vänster om detta (M_1 och M_2)

samt stödmomenten de två stöden till höger om stöd 3 (M_4 och M_5). De stödnedsjunkningar y_2 , y_3 och y_4 som behövs för att beräkna ϕ enligt ekv (16) tecknas nämligen

$$y_2 = [R_{02} + (M_1 - M_2)/L_1 + (M_3 - M_2)/L_2] / k_2 \quad \dots (20)$$

$$y_3 = \text{ekv}(19)$$

$$y_4 = [R_{04} + (M_3 - M_4)/L_3 + (M_4 - M_2)/L_3] / k_4 \quad \dots (21)$$

Användningen av 5 stödmoment för analysen är förstås motiveringen till benämningen "femmomentekvationen".

Med syftet att uppnå en matrisformulering tecknas motsvarigheten till ekv (4) (balk på fasta stöd) enligt:

$$g_1 M_1 + g_2 M_2 + g_3 M_3 + g_4 M_4 + g_5 M_5 = q_3 \quad \dots (22)$$

där g_1 , g_2 , g_3 , g_4 och g_5 är koefficienter som beror av balkens egenskaper och termen q_3 även beror av lastdata.

Beräkningen av koefficienterna g_1 , är relativt omständlig. Insatsen omfattar insättning av ekv (19), (20) och (21) i ekv (16) och därefter förenklingar och förkortningar. Slutresultatet för en balk med konstant E-modul, stöd 3, visas på nästa sida.

$$g_1 = 6EA_1 \quad \dots(23a)$$

$$g_2 = L_2/l_2 - 6E(A_1 + A_2 + A_3) \quad \dots(23b)$$

$$g_3 = 2(L_2/l_2 + L_3/l_3) + 6E(A_2 + 2A_3 + A_4) \quad \dots(23c)$$

$$g_4 = L_3/l_3 - 6E(A_3 + A_4 + A_5) \quad \dots(23d)$$

$$g_5 = 6EA_5 \quad \dots(23e)$$

$$q_3 = -6E[\alpha + \beta + R_{02}/(k_2 L_2) - (R_{03}/k_2)(1/L_2 + 1/L_3) + R_{04}/(k_4 L_3)] \quad \dots(24)$$

där

$$A_1 = 1/(k_2 L_1 L_2) \quad \dots(25a)$$

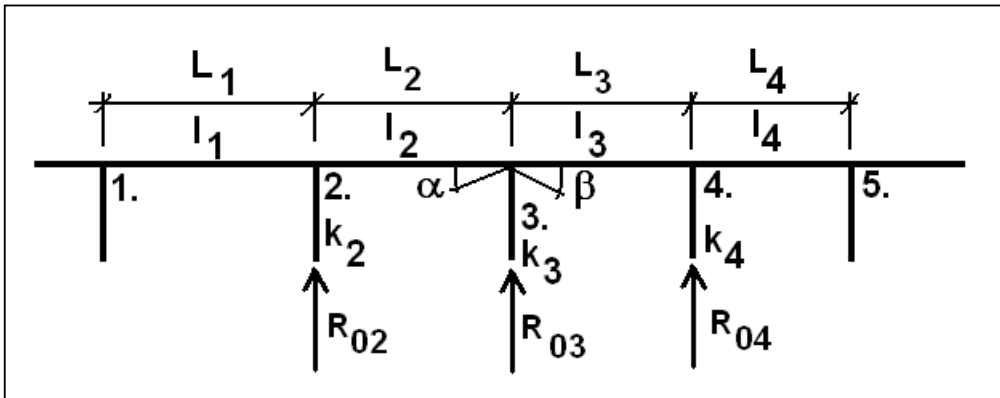
$$A_2 = (1/(L_2 L_2)) * (1/k_2 + 1/k_3) \quad \dots(25b)$$

$$A3 = 1/(k_3 L_2 L_3) \quad \dots(25c)$$

$$A4 = (1/(L_3 L_3)) * (1/k_3 + 1/k_4) \quad \dots(25d)$$

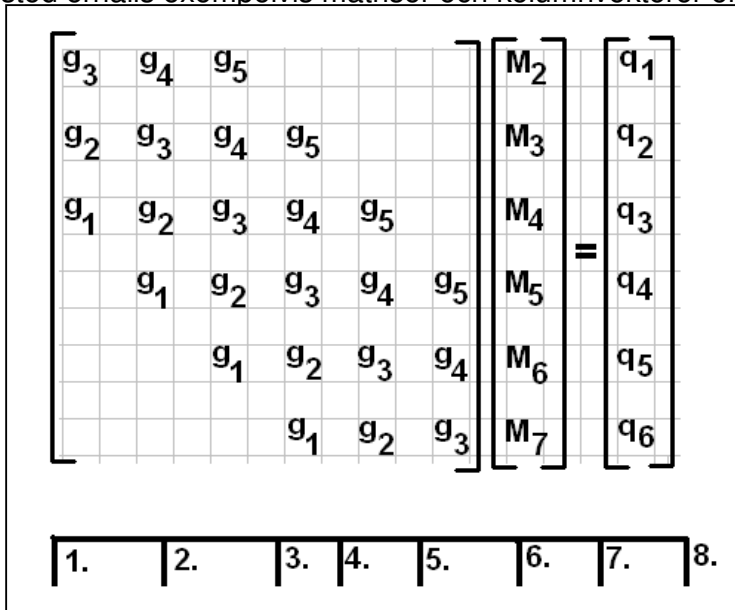
$$A5 = 1/(k_2 L_1 L_2) \quad \dots(25e)$$

Beteckningar framgår av figur 9.



Figur 9. Beteckningar ekv (23 a -e), (24) och (25 a -e).

Den kontinuerliga balk på elastiska stöd som ska analyseras antas ha ledade, ej momentbelastade, ändstöd, d v s stödmomenten där är = 0. För en balk på n stöd uppställs därför m= n-2 ekvationer för att beräkna m stödmoment. För en balk på 8 stöd erhålls exempelvis matriser och kolumnvektorer enligt figur 9.



Figur 9. Balk på 8 stöd, matrisbeskrivning

I matrisform kan uttrycket i figur 9 skrivas

$$\mathbf{GM} = \mathbf{Q} \quad \dots(26)$$

med lösningen

$$\mathbf{M} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{Q} \quad \dots(27)$$

Sedan stödmomenten M_i beräknats så beräknar man reaktioner R_i och nedsjunkningar y_i ,

$$R_i = R_{0i} + (M_{i-1} - M_i)/L_{i-1} + (M_{i+1} - M_i)/L_i \quad \dots(28)$$

$$y_i = R_i / y_i \quad \dots(29)$$

där $i = 1, 2, \dots, n = \text{antal stöd}$.

Beräkningen är då klar. För att undersöka inverkan av avrundningsfel bör skillnaden mellan beräknade reaktioner och anbringade laster beräknas, d v s

$$\text{skillnad} = \text{summa}(R_i) - \text{summa}(R_{0i}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots(30)$$

I många program för beräkningar där oundvikliga numeriska avrundningsfel förekommer, ofta tillsammans med andra felkällor relaterade till beräkningsmetodik, saknas en sådan kontroll, vilket måste betecknas som en brist.

Lösning av ekvationssystemet, ekv (26)

Som framgår av figur 9 är matrisen \mathbf{G} en bandmatris med bandbredden 5 och ordningen $m \times m$. I likhet med motsvarande matris för en balk på fasta stöd är \mathbf{G} symmetrisk, vilket innebär att enbart elementen i huvuddiagonalen samt de två överliggande co-diagonalerna behöver beräknas och lagras.

Samma problematik som gäller balk på fasta stöd vad gäller beräkning av stödmomentvektorn \mathbf{M} med inversmatris gäller även för balk på elastiska stöd. Direkt Gausseliminering med åtföljande bakåtsubstitution är även här den snabbaste och minst utrymmeskrävande metoden. Villkoren för att \mathbf{G} skall vara diagonaldominant (eller positivt definit) är dock mer komplicerade. För det generella fallet med varierade k , L och I finner man att diagonaldominans kräver att varje rad uppfyller villkoret

$$L_2/I_2 + L_3/I_3 \geq 4E[1/(k_2L_1L_2) + 1/(k_4L_3L_4)] \quad \dots(31)$$

För balk med konstanta värden för fjäderkonstanter k , spännvidder L och böjstyvheter EI ger ekv (31) att diagonaldominans erhålls om

$$kL^3/(EI) \geq 4 \quad \dots(32)$$

Den numeriska stabiliteten gynnas alltså av stora värden på fjäderkonstanterna k , stora spännvidder L och små värden på böjstyvheten EI . Omvänt kan små fjäderkonstanter, små spännvidder och stor böjstyvhet ge signifikant noggrannhetsförlust vid den föredragna metoden direkt Gausselimination. Enklast kontrolleras detta genom beräkning av differensen ekv (30). Som nämnts tidigare får inte värdet noll förekomma i huvuddiagonalen (g_3) vid direkt Gausseliminering.

Det ska nämnas att noggrannhetsförlust inte uppkommer plötsligt vid direkt Gausseliminering då koefficientmatrisen G inte helt uppfyller kraven för diagonaldominans. I praktiken kan ofta relativt brutala val av balkdata ske utan att alltför stora fel i beräkningsresultatet uppkommer. Extrema värden kan vara motiverade av behov av att simulera leder, konsoler, inspända ändstöd, och andra diskontinuiteter hos balken. Givetvis ska i sådana fall kontroll av beräkningsresultatet ekv (30) ske.

En generellt sett mer stabil algoritm för lösningen av ekvationssystemet ekv(26) kan uppnås genom pivotering utförs, så att noggrannheten optimeras. En sådan metod medför dock ökad beräkningstid, vilket i många fall kanske inte har så stor betydelse, men också, som det visat sig, inte alltid ger åsyftat resultat. Genom möjligheten av ett brett spektrum av val av värden som genererar matriselementen blir det inte möjligt att entydigt bestämma någon metod som för alla variationer garanterar en hög noggrannhet. Användning av Direkt Gausseliminering och bakåtsubstitution tillämpas därför tillsammans med kontroll av räknefele enligt ekv (30). Uppkommer större fel är det i allmänhet möjligt att ändra några indata så att godtagbart resultat erhålls.

I de fall flera lastfall (fler högerled Q) ska beräknas så sparar man den efter Gausselimineringen triangulerade matrisen G .

LU-faktorisering

Om G är positivt definit, vilket i allmänhet är fallet för aktuella balkar, så kan G faktoriseras med Choleskis metod, vilket ger snabb beräkning:

$$G = U^T U \quad \dots (33)$$

(U^T är transponatet av U)

varefter man löser

$$U^T x = Q \quad \dots(34)$$

som ger en vektor x

$$\text{och sedan } UM = x \quad \dots(35)$$

som ger den de sökta stödmomenten **M**. För det aktuella problemet bedöms dock den nedan beskrivna algoritmen mer effektiv i och med att den särskilt tar hänsyn till egenskaperna hos **G**.

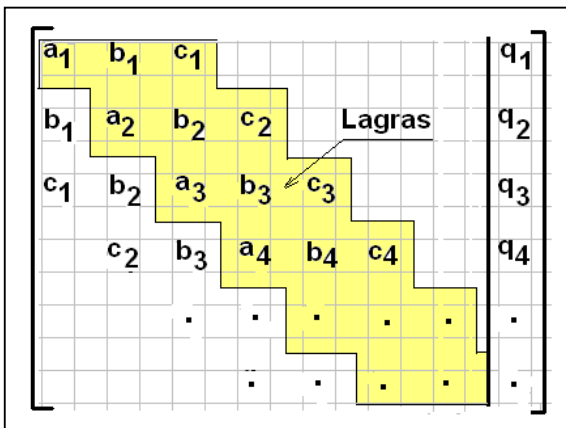
Direkt Gausseliminering med bakåtsubstitution

Huvuddiagonalen och de två överliggande co-diagonalerna lagras som vektorer **a**, **b** och **c**.

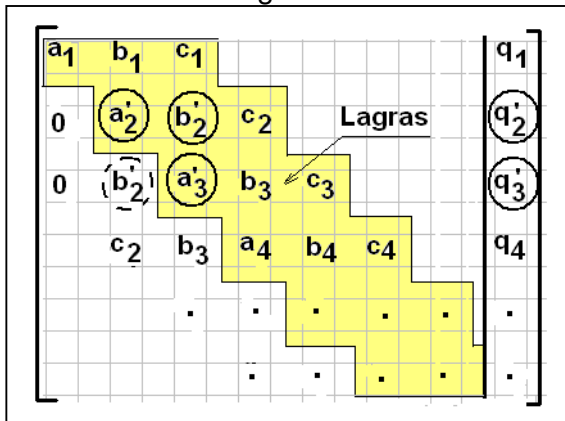
$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_m) \quad \dots(36a)$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_{m-1}) \quad \dots(36b)$$

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_{m-2}) \quad \dots(36c)$$



Figur 10. Matris **G** lagrad som vektorer **a**, **b** och **c**
Vid varje eliminationssteg så transformeras 3 element i **G**-matrisen, tillsammans med två element i **Q**. I figur 11 illustreras det 1:a steget.



Figur 11. **G**-matrisen och högerledet **Q** efter 1:a eliminationssteget

Algoritmen för eliminationen lyder för $i = 1, 2, \dots, m$

$$p_i = q_i/a_i \quad \dots(37a)$$

$$a_{i+1} = a_{i+1} - p_i b_i \quad \dots(37b)$$

$$b_{i+1} = b_{i+1} - p_i c_i \quad \dots(37c)$$

$$a_{i+2} = a_{i+2} - c_i c_i / a_i \quad \dots(37d)$$

$$q_{i+1} = q_{i+1} - p_i q_i \quad \dots(37e)$$

$$q_{i+2} = q_{i+2} - c_i q_i / a_i \quad \dots(37e)$$

Slutresultatet är en triangulär matris **G** (enbart element = 0 under huvuddiagonalen) så att bakåtsubstitution kan starta, se figur 12.

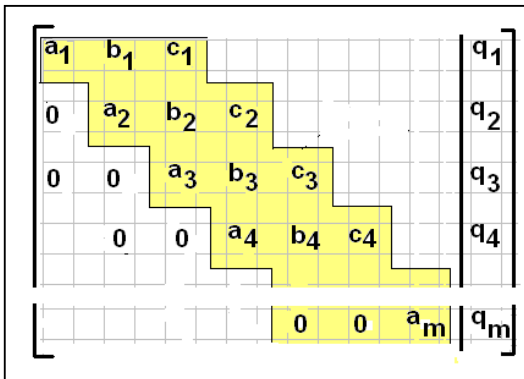


Fig 12. Slutresultatet av Gausseliminationen, **G** är triangulerad

Bakåtsubstitution

Bakåtsubstitutionen börjar från botten av den triangulerade **G**-matrisen:

$$M_m = q_m / a_m \quad \dots(38)$$

Övriga stödmoment M_j beräknas uppåt i figur 12 enligt uttrycket

$$M_j = (q_j - M_{j+1} * b_j - M_{j+2} * c_{j-1}) / a_j \quad ; j = m-1, m-2, \dots, 2 \quad \dots (39)$$

Ändstödmomenten, M_1 och M_n antas vara = 0

Notera att index för vektorelementen i figurerna är något missvisande så tillvida att den första raden i **G**-matrisen avser stöd 2.

Balkar på elastiskt underlag

Då avståndet (L) mellan stöden minskar närmar sig förhållandena de som gäller för en balk på elastiskt underlag av Winkler-typ. En sådan balk kännetecknas av att kontaktrycket (p) mellan balken och underlaget i varje balktvärsnitt är proportionellt mot nedsänkningen (y) i snittet, d v s

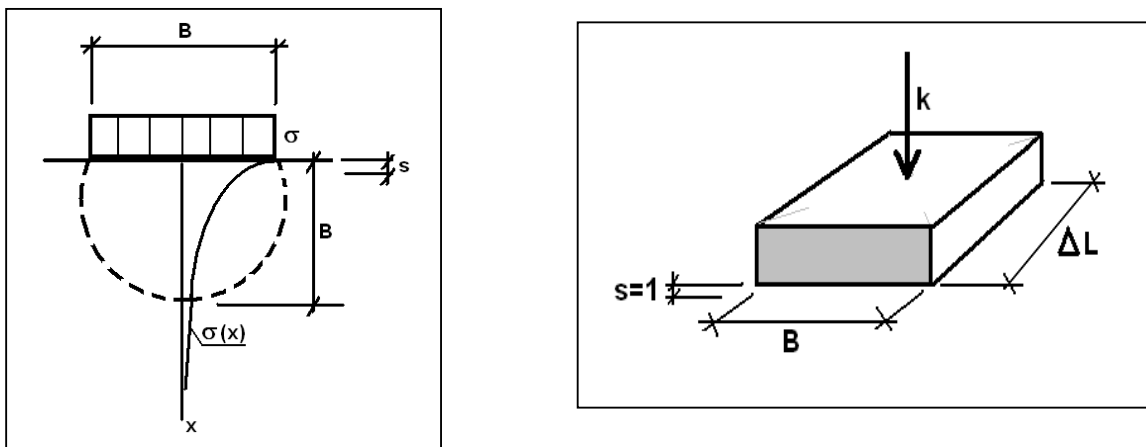
$$p = cy \quad , \text{ [kraft/längdenhet t}^3 \text{]} \quad \dots(40)$$

$$\text{där } c = \text{ markens bäddmodul} \quad , \text{ [kraft/längdenhet}^3 \text{]} \quad \dots(41)$$

För en sådan balk ger elastiska linjens ekvation vid konstanta värden för L, EI och c:

$$EI(d^4y/dx^4) + cy = q(x) \quad ; \quad q(x) = \text{belastning på balken} \quad \dots (42)$$

Vid analys med 5-momentekvationen "översätts" det elastiska underlaget till fjäderstyhveter på det sätt som visas i figur 13.



Figur 13. Beräkning av ekvivalent stödtyvhet k vid balk på elastiskt underlag

Såsom illustreras i figur 13 minskar den vertikala tilläggsspänningen $\sigma(x)$ av en belastning på markytan σ med ökande djup x . Förenklat kan detta visas med 2:1-metoden. Man brukar därför försumma spänningsökningen på ett djup större än lastens bredd B , som antyds i figuren. Om nedsänkningen betecknas s så blir då den relativa nedsänkningen ϵ :

$$\epsilon = s/B \quad \dots(43)$$

Vi söker ϵ för nedsänkningen $s = 1$ längdenhet, vilket ger :

$$\epsilon = 1/B \quad \dots(44)$$

Ett utskuret balksegment av en balk på elastiskt underlag har arean $(B \times \Delta L)$, se figur 13. Den sökta fjäderkonstanten k , som ska användas vid beräkning med fem-momentekvationen, är då den kraft som ger segmentet nedsjunkningen $s = 1$.

Kontakttrycket σ mellan balken och underlaget för segmentet är

$$\sigma = k/(B \times \Delta L) \quad \dots(45)$$

Enligt Hook's lag gäller

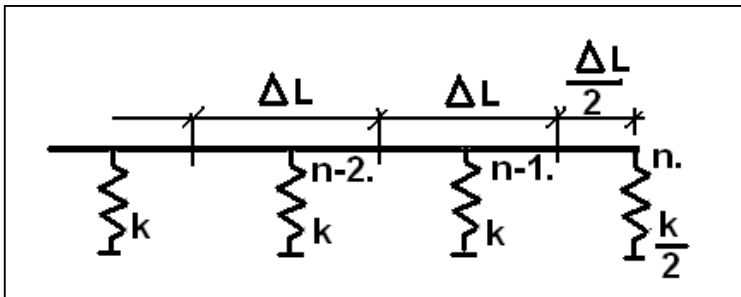
$$\varepsilon = \sigma / E_{jord} \quad \dots(46)$$

Kombineras ekv(44), (45) och (46) får man efter förenkling

$$k = \Delta L \cdot E_{jord} \quad \dots(47)$$

Värden på jordens E-modul (E_{jord}) redovisas i handböcker och brukar för anges i tekniska beskrivningar i förfrågningsunderlag för byggobjekt.

För ändstöd ska k enligt Winkler-modellen väljas till hälften av värdet enligt ekv (47) när balken delas in i lika delar, se figur 14.

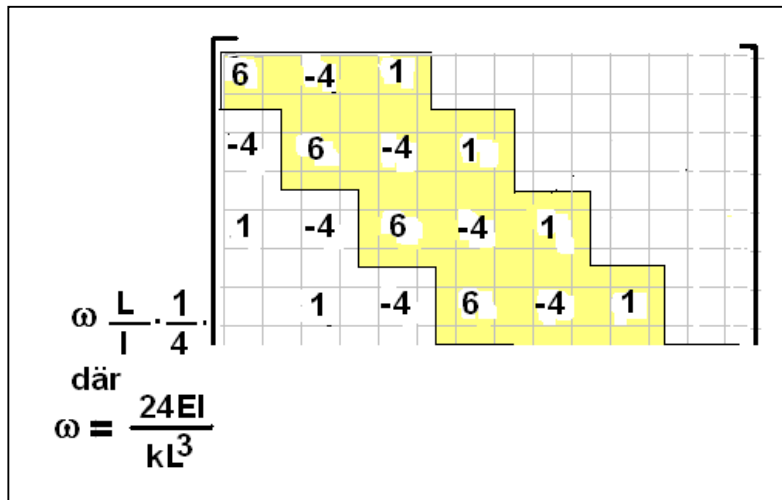


Figur 14. Fjäderkonstant för ändstöd enligt Winkler-modell

Winklermodellen tolkad på detta sätt har emellertid bristen att förutsätta att det elastiska underlaget slutar vid balkändan. En mer korrekt teoretisk modell, som beaktar att underlaget sträcker sig förbi balkändan ger ett högre värde för den modellerade balkens fjäderkonstanter vid ändstöden. Därför är det motiverat att använda samma fjäderkonstant k för ändstöden som för resten av balken. Överensstämmelsen med differentialekvationen ekv (42) minskar dock något vid detta val eftersom den förutsätter Winkler-underlag.

En berättigad fråga är hur den numeriska noggrannheten påverkas av val av segmentlängder.

För mycket små värden för fjäderkonstanterna och konstanta värden EI , k och L för varje balkfack närmar sig matrisen \mathbf{G} koefficienterna enligt figur 15.



Figur 15. Matrisen G vid mycket eftergivliga stöd

Man kan visa att **G** är positivt definit, vilket medger LU-faktorisering och i säkerställer god numerisk noggrannhet vid lösning, när

$$\omega \geq 0 \quad \dots(48)$$

där

$$\omega = 24EI/kL^3 \quad \dots(49)$$

Om man gör substitutionen $k = L E_{jord}$ så ger ekv (48) och (49) efter förenkling

$$\Delta L \leq [24EI/E_{jord}]^{1/4} \quad \dots (50)$$

Man kan notera att koefficienterna i **G**-matrisen, fig 15, är desamma som erhålls vid differensapproximation med centraldifferens av $d^4 y/dx^4$ i differentialekvationen för balk på elastiskt underlag, ekv (42):

$$(d^4 y/dx^4) \text{ är approx} = [y_{i+2,i} - 4 y_{i+1,i} + 6y_{i,i} - 4 y_{i-1,i} + y_{i-2,i}] / \Delta x^2 \quad \dots (51)$$

Då segmentlängderna närmar sig noll närmar sig alltså den visade lösningen för femmomentekvationen balken på kontinuerligt elastiskt underlag, som sig bör.

2008 – 08 - 01

Bredenberg Teknik

Håkan Bredenberg